TEMA 2: Programação Linear

A resolução de um problema, pelo método da Investigação Operacional, segue as seguintes fases:

Definição do problema. Nesta fase são definidos os objetivos a serem atingidos, as variáveis envolvidas no problema, e as principais restrições.

Construção do modelo matemático. A escolha do modelo depende do tipo de problema a ser resolvido. Os modelos matemáticos mais utilizados são de programação linear.

Solução do modelo. Nesta fase, a solução é encontrada a partir do modelo matemático adotado na resolução do problema.

Validação do modelo. Para ver se a solução obtida é condizente com o problema estudado.

Implementação da solução. Nesta fase, a solução é convertida em regras práticas para a solução do problema

Principais modelos da IO

Programação linear

Conjunto de técnicas que permitem resolver os problemas de optimização, num sistema de recursos limitados, sendo lineares, quer a função objectivo, quer as restrições

Programação inteira

Modelo de Programação Linear no qual as variáveis de decisão são inteiras

Otimização em redes

São usados para problemas de diversas áreas (transporte, comunicação, energia, distribuição, planejamento de projetos, gerenciamento de recursos, etc)

Programação dinâmica

Os algoritmos de divisão e conquista particionam o problema em subproblemas, resolvem os subproblemas de forma recursiva, e em seguida, combinam suas soluções para resolver o problema original

Programação não linear

Quando o modelo de programação matemática tem função objetivo e/ou restrições não lineares

Simulação discreta

Modela a operação de um sistema como uma sequência de eventos discretos no tempo. Cada evento ocorre em um determinado instante de tempo e marca uma mudança de estado no sistema

Teoria dos jogos

Usada na análise dos problemas de decisão ou em situações competitivas nas quais existem conflitos entre partes envolvidas.

Simulação de Monte Carlo

Qualquer método de uma classe de métodos estatísticos que se baseiam em amostragens aleatórias massivas para obter resultados numéricos, isto é, repetindo sucessivas simulações um elevado número de vezes, para calcular probabilidades heuristicamente, tal como se, de fato, se registrassem os resultados reais em jogos de casino (daí o nome)

Modelo de programação linear

1. **Variáveis de decisão** – apresenta as decisoes que devem ser tomadas no modelo.
2. **Objectivo** – é uma função linear, que vamos pretender optimizar, isto é, maximizar ou minimizar
3. **Restriçoes** - consiste em relacionar cada actividade e recursos utilizados e respeitar a disponibilidade de recursos. Muitas das vezes, as restrições são escritas através de inequações ou equações lineares.

TEMA 2: Programação Linear

Uma companhia de montagem de lâmpadas, usa dois modelos para a montagem: o modelo actual automático e o modelo antigo com acessoria. Cada pessoa no modelo actual requer 1 hora de trabalho se vier do departamento de corte e 3 horas se vier do departamento de verificação. No modelo antigo, cada pessoa necessita de 2 horas de trabalho, se vier do departamento de corte e 4 horas de trabalho se, fôr do departamento de verificação. O número máximo de horas de trabalho por dia para o departamento de corte e de verificação é 32 e 84, respectivamente. Se a companhia recebe um lucro de 50 u.m. por cada lâmpada vinda do modelo actual e 80 u.m. do modelo antigo, quantas lâmpadas devem ser produzidas por dia em cada modelo de modo que a companhia maximize o lucro diário?

Objectivo!!

Resumo dos dados do problema

Departamento	***MODELO***		Disponibilidade
	Actual	Antigo	
Corte	1 h	2 h	32 h
Verificação	3 h	4 h	84 h
Lucro	50 u.m	80 u.m	

Formulação do modelo matemático dos problemas de programação linear

Variáveis de decisão:

x_1 – número de lâmpadas produzidas no modelo actual por dia;

x_2 – número de lâmpadas produzidas no modelo antigo por dia.

Função objectivo:

O objectivo da companhia é decidir quantas lâmpadas são necessárias por dia para cada modelo, de modo que ele tenha o máximo de lucro diário.

A função lucro deste problema é: $L = 50x_1 + 80x_2 \rightarrow$ função objectivo

Restrições:

Restrições são inequações ou equações que representam as relações entre as quantidades produzidas, as composições das horas e a disponibilidade máxima do recurso. Assim temos:

- Restrição para o departamento de corte: $1x_1 + 2x_2 \leq 32$

- Restrição para o departamento de verificação: $3x_1 + 4x_2 \leq 84$

- Como não podemos produzir um número negativo de lâmpadas, então adiciona-se as

restrições de não negatividade: $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ ou usualmente $x_1, x_2 \geq 0$.

Modelo matemático

Maximizar $Z = 50x_1 + 80x_2$ $\rightarrow$ função objectiva

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \le 32 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 84 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ conjunto as restrições

Exemplo 2. Um alfaiate tem disponível 16 m^2 de algodão, 11 m^2 de seda e 15 m^2 de lâ. A confecção de um fato necessita de 2 m^2 de algodão, 1 m^2 de seda e 1 m^2 de lã, e um vestido gasta 1, 2 e 3 m^2 dos mesmos tecidos, respectivamente. Se um fato é vendido à 30 u.m (unidades de medida) e um vestido por 50 u.m., quantas unidades de cada artigo fato ou vestido deve o alfaiate confeccionar de modo a obter maior lucro?

	artigos		
tecidos	fato	vestido	Disponível
algodão	2	1	16
seda	1	2	11
lâ	1	3	15
preço de venda	30	50	

Maximizar $Z = 30x_1 + 50x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \leq 16 \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ 1x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$

Exemplo 3. Um agricultor precisa de 100 kg de Azoto (N), 120 kg de Fósforo (P) e 120 kg de Potássio (K), para adubar a sua plantação. Ele tem duas possibilidades no mercado, sendo uma na forma líquida em tambores que contém 50 kg de N, 20 kg de P e 10 kg de K ao preço de 30 u.m cada; outra empresa fornece adubo em sacos, contendo 10, 20 e 40 kg de N, P e K, respectivamente, ao preço de 20 u.m cada saco. Quantas embalagens de cada fonte deverá o agricultor comprar para suprir as suas necessidades pelo menor custo.

Exemplo 4. Um indivíduo pretende fazer uma selecção dum conjunto de 5 alimentos básicos. Por forma a conseguir estruturar uma dieta que, do ponto de vista nutritivo, tenha como normas mínimas de calorias e vitaminas, respectivamente, 70 e 50 unidades, gastando o mínimo possível. Os preços de venda dos alimentos, bem como a sua composição em elementos nutritivos são dados pelo seguinte quadro.

Elemento nutritivo	Alimentos				
	A	B	C	D	E
Calorias	1	0	1	1	2
Vitaminas	0	1	0	1	1
Custo unitário	2	20	3	11	12

Elabore o modelo matemático do problema.

Definição geral dos problemas de programação linear

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m$

Sujeito à
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m \le b_2 \\ \text{...} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m \le b_n \\ x_1, x_2, ..., x_n \ge 0 \end{cases}$$

Admite-se que, em lugar de maximizar, haja minimizar, e em lugar de menor ou igual ($\le$) seja maior ou igual ($\ge$) ou mesmo igual (=).

Exercício 2.1. Um padeiro dispõe de 150, 90 e 150 unidades dos ingredientes A, B e C respectivamente. Cada pão necessita de 1 unidade de A, 1 de B e 2 de C, e um bolo precisa de 5, 2 e 1 unidades de A, B e C, respectivamente. Se um pão é vendido a 35 u.m., e um bolo é vendido por 80 u.m. Como deve o padeiro distribuir as matérias-primas disponíveis de modo a obter o maior lucro?. Elabore o modelo matemático correspondente a este problema de programação linear.

Exercício 2.2. Cada kg do alimento A custa 85 u.m. e contém 2 unidades de proteína, 6 de hidrato de carbono e 1 de gordura. O alimento B que se pode comprar a 45 u.m. por kg, contém 1, 1 e 3 unidades, daqueles produtos, respectivamente. Supondo que as necessidades semanais mínimas de uma pessoa são 8 unidades de proteínas, 12 de hidrato de carbono e 9 de gordura. Elabore o modelo económico - matemático de forma que a pessoa economize os seus gastos.

TPC: Mulenga. Página 10 e 11 (Exercícios 2.1 à 2.8

SUMÁRIO

1. Formulação de um Problema de Programação Linear

2. Construção de Modelos Matemáticos